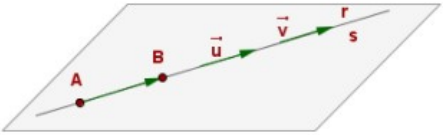
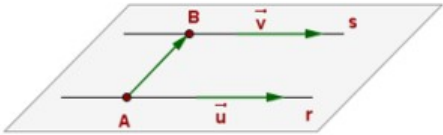
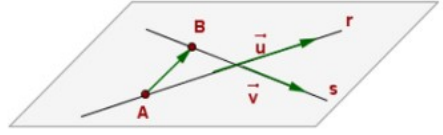
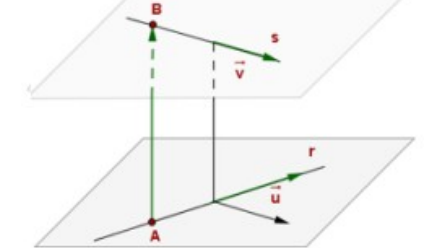
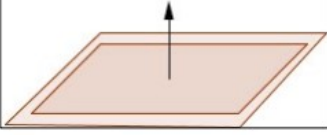
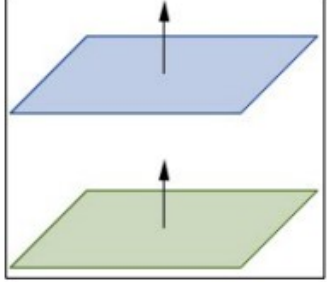


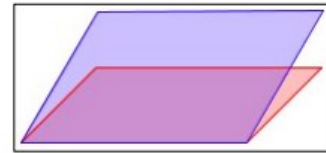
POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTAS

$M' = \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 & d_1' \\ d_2 & d_2' \\ d_3 & d_3' \end{pmatrix}}_M \begin{vmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{vmatrix}$	
Si $\text{ran}(M) = \text{ran}(M') = 1 \Rightarrow r$ y s coinciden.	
Si $\text{ran}(M) = 1 \neq \text{ran}(M') = 2 \Rightarrow r$ y s son paralelas.	
Si $\text{ran}(M) = \text{ran}(M') = 2 \Rightarrow r$ y s se cortan.	
Si $\text{ran}(M) = 2 \neq \text{ran}(M') = 3 \Rightarrow r$ y s se cruzan.	

POSICIONES RELATIVAS ENTRE 2 PLANOS

$\begin{cases} \pi_1 \equiv ax + by + cz + d = 0 \\ \pi_2 \equiv a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$	$M' = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}}_M \begin{vmatrix} d \\ d' \end{vmatrix}$
Si $\text{ran}(M) = \text{ran}(M') = 1 \Rightarrow \pi_1$ y π_2 son coincidentes.	
Si $\text{ran}(M) = 1 \neq \text{ran}(M') = 2 \Rightarrow \pi_1$ y π_2 son paralelos.	

Si $\text{ran}(M) = \text{ran}(M') = 2 \Rightarrow \pi_1$ y π_2 se cortan en una recta.



POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTA Y PLANO

$$r: \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

$$\pi: A''x + B''y + C''z + D'' = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$$

$$M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

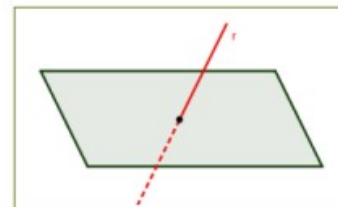
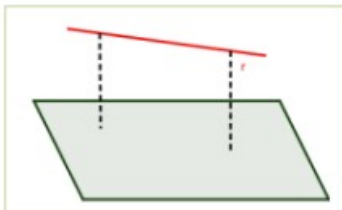
1. Si $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 2 \Rightarrow S.C.I. \Rightarrow$ El sistema tiene infinitas soluciones. La **recta** está **contenida en el plano**.



La interpretación geométrica es simple, los tres planos (los dos que definen la recta y el plano π) pertenecen a un mismo haz.

2. Si $\text{rg}(M) = 2 \neq \text{rg}(M^*) = 3 \Rightarrow S.I. \Rightarrow$ El sistema no tiene solución. La recta y el plano no se cortan, por tanto son **paralelos**.

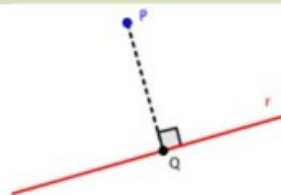
Geoméricamente se interpreta que el vector de la recta es combinación lineal de los vectores del plano, pero no tienen ningún punto en común.



3. Si $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^*) = 3 \Rightarrow S.C.D. \Rightarrow$ El sistema tiene una única solución. La recta y el plano son **secantes** y se cortan en un punto.

Proyección ortogonal de un punto sobre una recta

La proyección ortogonal de un punto P sobre una recta r será otro punto Q perteneciente a la recta, y tal que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular al vector director de la recta.



Ej:

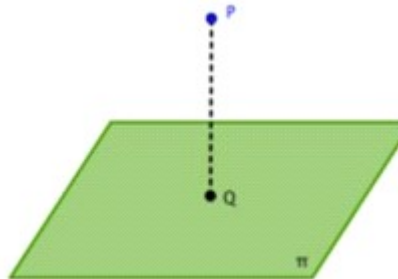
Halla la proyección ortogonal del punto $P(1, 2, -1)$ sobre la recta $r: \frac{x+2}{3} = y-1 = \frac{z+1}{2}$

Sol:

$$Q\left(\frac{1}{7}, \frac{12}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

Proyección ortogonal de un punto sobre un plano

La proyección ortogonal de un punto P sobre un plano π es otro punto Q perteneciente al plano, y tal que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular al plano.



Ej:

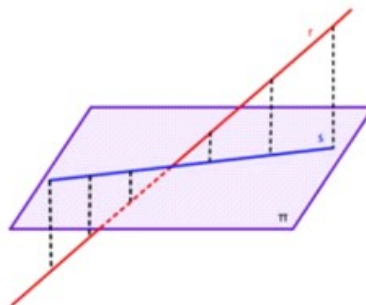
Halla la proyección ortogonal del punto $P(-1, 3, 2)$ sobre el plano $\pi: x - 2y + 3z - 1 = 0$.

Sol:

$$Q\left(-\frac{6}{7}, \frac{19}{7}, \frac{17}{7}\right)$$

Proyección ortogonal de una recta sobre un plano

La proyección ortogonal de una recta r sobre un plano π es otra recta s que está contenida en el plano, y tal que el plano π' que contiene a las dos rectas es perpendicular al plano π .



Para hallar la proyección ortogonal de una recta sobre un plano, hallamos la ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular al plano dado. La ecuación de la recta vendrá dada en forma implícita como intersección de los dos planos π y π' .

Ej:

Halla la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π , siendo:

$$\left. \begin{array}{l} x = -2 + 3\lambda \\ r: y = 1 + \lambda \\ z = -3 - \lambda \end{array} \right\} \quad \text{y} \quad \pi: x + y - z + 1 = 0$$

Sol:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - z + 1 = 0 \\ y + z + 2 = 0 \end{array} \right\}$$

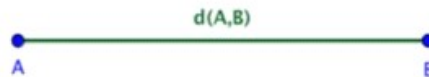
DISTANCIAS EN EL ESPACIO

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos A y B en el espacio es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} A(a_1, a_2, a_3) \\ B(b_1, b_2, b_3) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$



Ej:

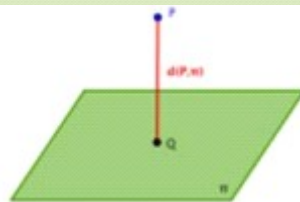
Calcula la distancia del punto $A(2, 1, -1)$ al punto $B(-1, -2, 2)$.

Sol:

$$3\sqrt{3} \text{ u}$$

Distancia de un punto a un plano

La distancia de un punto P a un plano π es la distancia del punto P a su proyección ortogonal sobre dicho plano.



Ej:

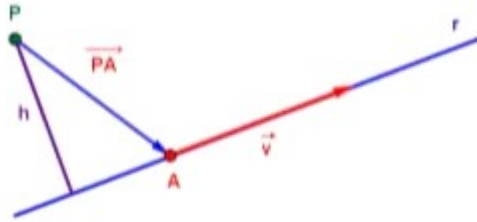
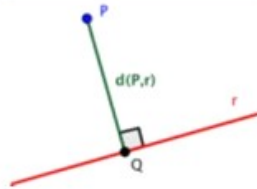
Calcula la distancia del punto $P(2, -1, 0)$ al plano $\pi: 2x + y - z + 3 = 0$.

Sol:

$$\sqrt{6} \text{ u}$$

Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto P a una recta r es la distancia del punto P a su proyección ortogonal sobre dicha recta.



$$d(P,r) = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}|}$$

Ej:

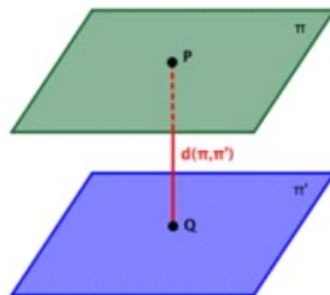
Calcula la distancia del punto $P(2, -1, 0)$ a la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

Sol:

$$\sqrt{\frac{12}{7}} u$$

Distancia entre 2 planos

- Si los planos son coincidentes o secantes: la distancia es cero.
- Si los planos son paralelos: la distancia entre ellos será la distancia entre cualquier punto de uno de los planos al otro plano.



Ej:

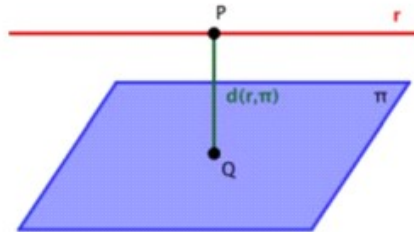
Calcula la distancia entre los planos $\pi: 2x + y - z + 3 = 0$ y $\pi': 4x + 2y - 2z + 5 = 0$

Sol:

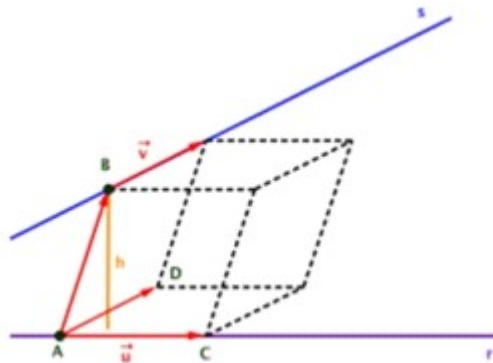
$$\frac{\sqrt{6}}{12} u$$

Distancia entre 1 recta y un plano

- Si la recta y el plano tienen algún punto en común: la distancia es cero.
- Si la recta y el plano son paralelos: la distancia entre ellos será la distancia entre cualquier punto de la recta y el plano.



Distancia entre 2 rectas que se cruzan



$$d(r, s) = \frac{|\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Ej:

Halla la distancia entre las rectas $r: \begin{cases} x+2y-3=0 \\ y+z+4=0 \end{cases}$ y $s: x+2=-2y=z-1$.

Sol:

$$\sqrt{5} u.$$

π : Plano recta r (vector $\vec{u}$), punto A y vector paralelo a $\vec{v}$ que pasa por A .

Vector $\vec{u}$ de r

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{u} (2, -1, 1)$$

$$\vec{v} (1, -1/2, 1)$$

plano π

Punto A (3,0,-4)

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z+4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -x + 3 - 2y = 0$$

Distancia del punto (-2,0,1) al plano π :

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d = \frac{|(-1) \cdot (-2) + (-2) \cdot (0) + 3|}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$