Problemas de selectividad sobre continuidad y asíntotas

2. **2000 JUNIO** Se considera la función: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{x-1} & si\ x\le 2\\ \dfrac{3x^2-2x}{x+2} & si\ x>2\end{cases}$

a) Estúdiese si *f(x)* es continua en x=2.
b) Calcúlese la ecuación de la recta tangente a *f(x)* en el punto x=3.
c) Calcúlense sus asíntotas oblicuas.

Solución:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 2^-}\frac{x+2}{x-1}=4$$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 2^-}\frac{3x^2-2x}{x+2}=2$$

Luego la función es discontinua no evitable en $x=2$ (hay un salto).

2.

$$\text{Si } x=3\Longrightarrow f(x)=\frac{3x^2-2x}{x+2}\Longrightarrow f(3)=\frac{21}{5}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2+12x-4}{(x+2)^2}\Longrightarrow f'(3)=\frac{59}{25}$$

La recta tangente será:

$$y-\frac{21}{5}=\frac{59}{25}(x-3)$$

3. Cuando $x>2$: La ecuación es $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{3x^2-2x}{x^2+2x}=3$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-8x}{x+2}=-8$$

Luego en esta rama la recta $y=3x-8$ es una asíntota oblicua.

Cuando $x\le 2$:

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x+2}{x-1}=1$$

luego tiene una asíntota horizontal en $y=1$ y, por tanto, no hay oblicuas.

3. **2000 JUNIO** Sea la función dependiente de los parámetros a y b:

$$f(x)=\begin{cases}-2x-a & si\ x\le 0\\ x-1 & si\ 0<x\le 2\\ bx-5 & si\ x>2\end{cases}$$

a) Hállense los valores de ay b para que la función sea continua en el conjunto $\Re$ de números reales.
b) Represéntese gráficamente para los valores a=0 y b=3.
c) Para los valores a=0 y b=3, hállese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas x=1 y x=3.

Solución:

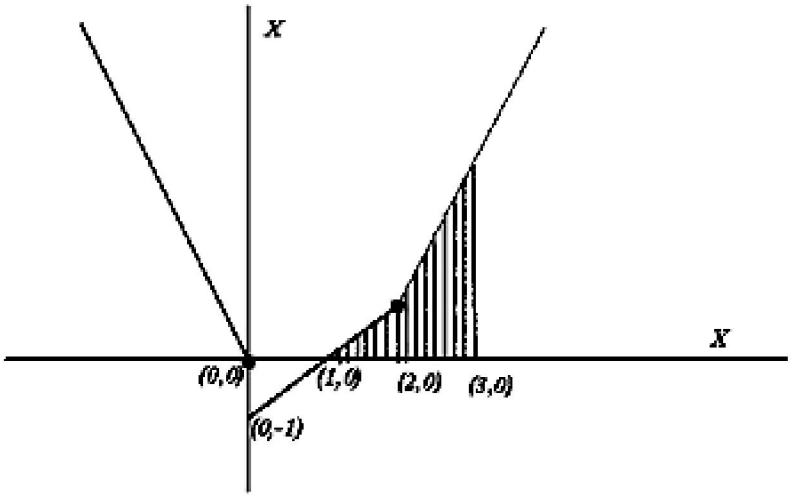
1.
   - En $x=0$:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-2x-a)=-a\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=-1\end{cases}\Longrightarrow a=1$$

   - En $x=2$:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(bx-5)=2b-5\end{cases}\Longrightarrow b=3$$

2. La representación sería:



Para $a=0$ y $b=3$:

$$f(x)=\begin{cases}-2x & \text{si} & x\le 0\\ x-1 & \text{si} & 0<x\le 2\\ -5 & \text{si} & x>0\end{cases}$$

3.

$$S=\int_1^2(x-1)\,dx+\int_2^3(3x-5)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2+\left[\frac{3x^2}{2}-5x\right]_2^3=3\ u^2$$

4. **2003 SEPTIEMBRE** Sea la función $f(x)=\dfrac{-x^2+1}{2x^2+2x-12}$

Se pide:

a) Especificar su dominio de definición.
b) Estudiar su continuidad.
c) Calcular sus asíntotas si las hubiera.

Solución:

1. $\text{Dom}(f) = R - \{-3, 2\}$

2. En $x = -3$

$$\lim_{x \longrightarrow -3^-} \frac{-x^2+1}{2x^2+2x-12} = \left[\frac{-8}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow -3^+} \frac{-x^2+1}{2x^2+2x-12} = \left[\frac{-8}{0^-}\right] = +\infty$$

Discontinua inevitable, hay un salto, es una asíntota. En $x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{-x^2+1}{2x^2+2x-12} = \left[\frac{-3}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} -x^2+12x^2+2x-12 = \left[\frac{-3}{0^+}\right] = -\infty$$

Discontinua inevitable, hay un salto, es una asíntota. La función es continua en el todo el dominio de f, es decir, en $R - \{-3, 2\}$.

3. Verticales: Por el apartado anterior, hay dos asíntotas en $x = 2$ y en $x = -3$.

Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{-x^2+1}{2x^2+2x-12} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}$$

Oblicuas: No hay

5. **2004 JUNIO** Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}$$

a) Determinar su dominio de definición.
b) Calcular sus asíntotas.

Soluciones:

a) $(-\infty,-2]\cup(-1,+1)\cup[2,+\infty)$ *b) horizontal: y=1 Verticales: x=-1 y x=1*

Solución:

1. Por ser una raiz, tiene que ser

$$\frac{x^2-4}{x^2-1}=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x-1)}\geq 0$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x^2-4}{x^2-1}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego $Dom\, f=(-\infty,-2]\cup(-1,1)\cup[2,\infty)$

2. **Asíntotas verticales:**

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}=\left[\sqrt{\frac{-3}{0^-}}\right]=+\infty\Longrightarrow x=1$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}=\left[\sqrt{\frac{-3}{0^-}}\right]=+\infty\Longrightarrow x=-1$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow \infty}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-1}}=1\Longrightarrow y=1$$

Asíntotas oblicuas: No hay, ya que hemos encontrado horizontales.

6.

2005 MODELO

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

1. Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$.
2. Esbozar su gráfica.
3. Hallar la ecuación de la recta tangente a dicha gráfica en $x = 1$.

Solución:

1.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} (2x^2 - 3x + 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 1} \ln x = 0 \qquad \Longrightarrow f \text{ es continua en } x = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

2.

$$f'(x) = 4x - 3 = 0 \Longrightarrow x = \frac{3}{4}$$

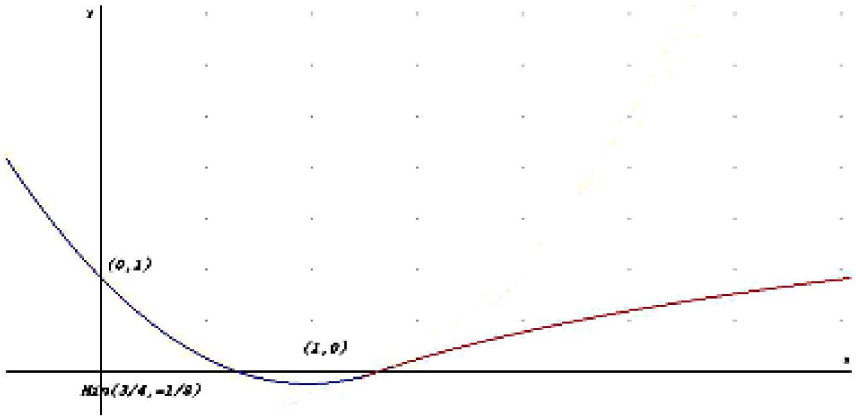
$$f''(x) = 4 \Longrightarrow f''(3/4) = 4 > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo}$$

Luego hay un mínimo en el punto $\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$

Hay puntos de corte en:

Con el eje OX, hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (1, 0)$ y $(1/2, 0)$.

Con el eje OX, hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 1)$.



3. En $x = 1 \Longrightarrow f(1) = 0$.

$$f'(x) = 4x - 3 \Longrightarrow m = f'(1) = -3$$

$$y = -3(x - 1) \Longrightarrow 3x + y - 3 = 0$$

7. **2006 SEPTIEMBRE** Dada la función real definida por $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-4}$.

a) Encontrar las asíntotas de la función.
b) Especificar el signo de la función en las distintas regiones en las que está definida.

Solución:

1. Verticales: $x=2$ y $x=-2$

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-}\frac{x^2-16}{x^2-4}=\left[\frac{-12}{0^-}\right]=+\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow 2^+}\frac{x^2-16}{x^2-4}=\left[\frac{-12}{0^+}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-}\frac{x^2-16}{x^2-4}=\left[\frac{-12}{0^+}\right]=-\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow -2^+}\frac{x^2-16}{x^2-4}=\left[\frac{-12}{0^-}\right]=+\infty$$

Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{x^2-16}{x^2-4}=1\Longrightarrow y=1$$

Oblicuas: No hay por haber horizontales.

2. Signo de $f(x)$

$$f(x)=\frac{x^2-16}{x^2-4}=\frac{(x+4)(x-4)}{(x+2)(x-2)}$$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,-2)$	$(-2,2)$	$(2,4)$	$(4,\infty)$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

La función es positiva en $(-\infty,-4)\cup(-2,2)\cup(4,\infty)$

La función es negativa en $(-4,-2)\cup(2,4)$

8. **2007 JUNIO** Dada la función real de variable real definida por $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x+3}$.

Determinar las asíntotas de la función.

Solución:

1. Asíntotas:

   - Verticales: $x=-3$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^-} f(x)=\lim_{x\longrightarrow -3^-}\frac{(x-3)^2}{x+3}=\left[\frac{36}{0^-}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -3^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow -3^+}\frac{(x-3)^2}{x+3}=\left[\frac{36}{0^+}\right]=+\infty$$

   - Horizontales: No hay

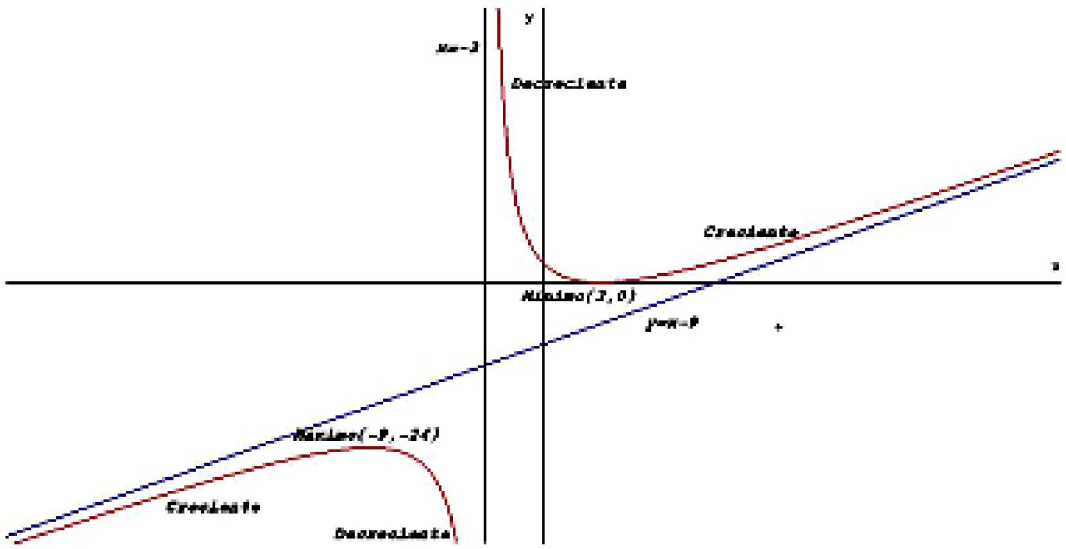
$$\lim_{x\longrightarrow \infty} f(x)=\infty$$

- Oblicuas: $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{(x-3)^2}{x^2+3x}=1$$

$$n=\lim_{x\longrightarrow \infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\longrightarrow \infty}\left(\frac{(x-3)^2}{x+3}-x\right)=\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{-9x+9}{x+3}=-9$$

$$y=x-9$$



9. **2007 SEPTIEMBRE** Dada la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}$$

a) Especificar su dominio de definición.

b) Estudiar su continuidad.

c) Calcular sus asíntotas, si las hubiera.

Solución:

1. $x^2-3x+2=0 \Longrightarrow x=2,\ x=1 \Longrightarrow \mathrm{Dom}(f)=R-\{1,2\}$
2. En $x=1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\longrightarrow 1^+}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=-1$$

Pero $f(1)$ no existe y por tanto se trata de una discontinuidad evitable. (La función tiene un agujero)

En $x=2$:

$$\lim_{x\longrightarrow 2^-}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\left[\frac{2}{0^-}\right]=-\infty$$

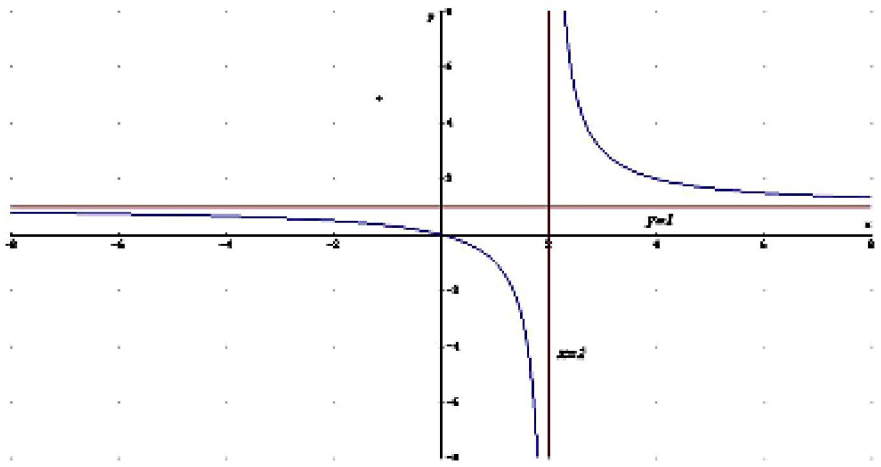
$$\lim_{x\longrightarrow 2^+}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\left[\frac{2}{0^+}\right]=\infty$$

La discontinuidad en este caso es inevitable. (La función pega un salto)

3. Asíntotas:
   - Verticales: $x=2$ por lo visto anteriormente
   - Horizontales: En $y=1$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=1$$

   - Oblicuas: No hay por haber horizontales



10. 2009 JUNIO

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-a}$$

1. Determínense las asíntotas de f, especificando los valores del parámetro real a para los cuales f tiene una asíntota vertical, dos asíntotas verticales, o bien no tiene asíntotas verticales.

Solución:

1. Para que f tenga asíntotas verticales $x^2 - x - a = 0 \Longrightarrow$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$$

- Si $a = -1/4$ la única asíntota vertical que hay es $x = \frac{1}{2}$
- Si $a < -1/4 \Longrightarrow 1 + 4a < 0 \Longrightarrow$ no hay asíntotas verticales.
- Si $a > -1/4 \Longrightarrow 1 + 4a > 0 \Longrightarrow$ hay dos asíntotas verticales:

$$x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}, \quad x = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$$